DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Soient $p, q > 1$ deux nombres réels. On se propose d'étudier pour certaines valeurs de $R > 0$ et $\lambda > 0$ le problème

$$\begin{cases} u'' - |u'|^q + \lambda u^p = 0 \quad \text{sur} \quad]-R, +R[, \\ u > 0 \quad \text{sur} \quad]-R, +R[, \\ u(-R) = u(+R) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dans toute la suite on admettra sans démonstration que pour tout x_0, a, b réels le problème de Cauchy

$$u'' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \ , \ u(x_0) = a \ , \ u'(x_0) = b$$

admet une solution maximale unique de classe C^2 sur un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \beta[$, α, $\beta > 0$, α, β pouvant prendre la valeur $+\infty$.

Pour $a > 0$, $\lambda > 0$ on notera $u = u_a$ la solution du problème:

$$\begin{cases} u'' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ u(0) = a \quad , \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

PARTIE I

1) Montrer que la solution maximale de (2) est définie sur un intervalle $]-R_a, +R_a[$ et que l'on a $u_a(x) = u_a(-x)$.

2) Montrer que si u est solution de (1) alors u atteint son maximum en 0 et $u(x) = u(-x)$ $\forall x \in [-R, +R]$.

3) En déduire que si u est solution de (1) alors u vérifie (2) sur $]-R, +R[$.

PARTIE II

On désigne par $z(a)$ le premier point positif où $u = u_a$ s'annule (si la solution maximale de (2) est strictement positive, on admettra qu'elle est alors définie sur tout $\mathbf{R}$, et on posera $z(a) = +\infty$).

1) Montrer que $u' < 0$ sur $]0, z(a)[$.

2) Montrer que la quantité $$H(x) = \frac{1}{2}u'(x)^2 + \frac{\lambda}{p+1}u(x)^{p+1}$$

est décroissante sur $]0, z(a)[$.

A SUIVRE

3) Montrer que

$$0 < -u'(x) \leq \sqrt{2\lambda/(p+1)}a^{(p+1)/2} \quad \text{sur} \quad]0, z(a)[\ .$$

4) En déduire

$$z(a) \geq \frac{a^{-(p-1)/2}}{\sqrt{2\lambda/(p+1)}}$$

5) Montrer que si $z(a) = +\infty$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} u'(x) = \lim_{x\to+\infty} u''(x) = 0.$$

6) Montrer qu'il existe un point $c(a) \in]0, z(a)[$ tel que

$$u'' < 0 \quad \text{sur} \quad [0, c(a)[\quad , \quad u'' > 0 \quad \text{sur} \quad]c(a), z(a)[.$$

7) En déduire

$$0 < -u'(x) \leq \lambda^{1/q}a^{p/q} \quad \text{sur} \quad]0, z(a)[\quad , \quad z(a) \geq \lambda^{-1/q}a^{1-p/q}.$$

PARTIE III

On suppose dans toute cette partie que $q = \frac{2p}{p+1}$.

1) Montrer que $$u_1(x) = \frac{1}{a}u_a(a^{-(p-1)/2}x).$$

2) En déduire que

$$z(a) = a^{-(p-1)/2}z(1)$$

et que $z(a)$ est fini quel que soit a si et seulement si $z(1)$ est fini.

3) On suppose

$$\lambda > \frac{(2p)^p}{(p+1)^{2p+1}}. \qquad (*)$$

a) Soit u solution de (2) telle que $z(a) = +\infty$. Montrer que si pour une constante $k > 0$ on a

$$u''(x) \leq k|u'(x)|^q \quad \forall x > 0$$

alors

$$u''(x) \leq \{1 - \lambda(\frac{p+1}{2k})^p\}|u'(x)|^q \quad \forall x > 0.$$

Tournez la page S.V.P.

b) On définit de façon récurrente la suite (k_n) par

$$k_0 = 1 \quad , \quad k_{n+1} = 1 - \lambda(\frac{p+1}{2k_n})^p \quad \text{si} \quad k_n > 0.$$

Montrer que k_n devient négatif ou nul.

c) Montrer que si (*) est vérifiée alors $z(a) < +\infty \quad \forall a > 0$. (On montrera en utilisant a) et b) que dans le cas contraire $u'' \leq 0$).

d) En déduire que si (*) est vérifiée alors le problème (1) admet pour tout R une solution unique.

4) On suppose

$$\lambda \leq \frac{(2p)^p}{(p+1)^{2p+1}}. \qquad (**)$$

a) Montrer que l'on peut trouver une constante $C > 0$ telle que $\cdot u(x) = Cx^{-2/(p-1)}$

vérifie $u'' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \qquad \forall x > 0.$

b) En déduire que si (**) est vérifiée alors il n'existe aucun R pour lequel le problème (1) ait une solution.

PARTIE IV

On suppose dans cette partie que $q > p > \frac{2p}{p+1}$.

1) Montrer que l'on a

$$z(a) \geq Max(\frac{a^{-(p-1)/2}}{\sqrt{2\lambda/(p+1)}}, \lambda^{-1/q} a^{1-p/q}).$$

2) Montrer que pour tout λ il existe $R_\lambda > 0$ tel que

-pour tout $R < R_\lambda$ le problème (1) n'admet pas de solution,

-pour tout $R > R_\lambda$ le problème (1) admet au moins deux solutions.

(On admettra sans démonstration que dans ce cas $z(a)$ est fini pour tout a et que $a \to z(a)$ est une fonction continue de a).

FIN